Exercice :

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches. On en prélève n successivement n^p et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les deux événements suivants :

A : " On obtient des boules des deux couleurs " ;

B : " On obtient au plus une blanche ".

1°) a) Calculer la probabilité de l'événement : " Toutes les boules tirées sont de même couleur ".

b) Calculer la probabilité de l'événement : " On obtient exactement une boule blanche ".

c) En déduire que les probabilités $p(A \cap B)$, $p(A)$, $p(B)$ sont :

$$p(A \cap B) = \frac{n}{2^n} \quad ; \quad p(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \quad ; \quad p(B) = \frac{n+1}{2^n}$$

2°) Montrer que $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ si, et seulement si, $2^{n-1} = n + 1$.

3°) Soit (u_n) la suite définie, pour tout n entier naturel supérieur ou égal à deux, par $u_n = 2^{n-1} - (n-1)$.

Calculer u_2, u_3, u_4. Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

1) a) C : « toutes les boules tirées sont de même couleur »

$C = \{(N, \ldots, N) \text{ ou } (B, \ldots, B)\}$ (n fois) (n fois)

$$p(C) = \left(\frac{5}{10}\right)^n + \left(\frac{5}{10}\right)^n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-1}}$$

D : « on obtient exactement une boule blanche »

$D = \{(B, N, \ldots, N)\}$ (avec ordre)